

See discussions, stats, and author profiles for this publication at: <https://www.researchgate.net/publication/271408127>

Numerical Solution of Singular Integral Equations of the Body Force Method in Notch Problems. 3rd Report. Application to 3D Problems.

Article in *Nihon Kikai Gakkai Ronbunshu, A Hen/Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Part A* · August 1993

DOI: 10.1299/kikaia.59.1964

CITATIONS

3

READS

8

2 authors, including:



Nao-Aki Noda

Kyushu Institute of Technology

695 PUBLICATIONS 3,769 CITATIONS

SEE PROFILE

1964

日本機械学会論文集(A 編)
59 巻 564 号(1993-8)

論文 No. 93-0144

応力集中問題における体積力法の特異積分方程式の数値解析法*

(第 3 報, 三次元問題への応用)

野 田 尚 昭*¹, 松 尾 忠 利*²

Numerical Solution of Singular Integral Equations of the Body Force Method in Notch Problems (3rd Report, Application to 3D Problems)

Nao-Aki NODA and Tadatoshi MATSUO

This paper deals with numerical solutions of singular integral equations of the body force method in 3D stress concentration problems. As examples, the problems of ellipsoidal cavities and a toroidal hole under uniform tension are considered. The problems are formulated as a system of singular integral equations with Cauchy-type singularities, where the densities of body forces distributing in the r and z directions are unknown functions. In order to satisfy the boundary conditions along the notches, several types of fundamental density functions are proposed; then, the body force densities are approximated by a linear combination of the fundamental density functions and polynomials. The accuracy of the present analysis is verified by comparing the present results with the results obtained by the conventional method. The present method is found to give rapidly converging numerical results for the stress distribution along the boundaries.

Key Words: Elasticity, Body Force Method, Numerical Analysis, Singular Integral Equation, Stress Concentration, Cavity

1. 緒 言

体積力法は, 切欠きの応力集中係数や, き裂の応力拡大係数の解析に数多く応用されている。体積力法は, 解析しようとする問題を, 無限板中の仮想境界面上に体積力または, 食違いを分布させることによって表現するものである⁽¹⁾⁽²⁾。問題を解くことは未知関数である仮想境界面上の体積力密度, あるいは, 食違い密度を求めることに帰着される。前報において, き裂問題^{(3)~(7)}だけでなく切欠問題においても, 未知関数である体積力密度を, 基本密度関数と階段関数の積で近似する従来の体積力法よりも, 階段関数の代わりに多項式を用いて近似する方法が, 特に境界上の応力分布を求める場合などに数値計算上便利であり少ない計算時間で高精度の解析が可能であることを示した⁽⁸⁾。また, 無限板中の 2 だ円孔の干渉問題の解析において, 境界条件を完全に満足させるために必要な新しい基本密度関数を定義し, 複数個のだ円孔の干渉問題の体積

力法の特異積分方程式を厳密に解析する方法を示した⁽⁹⁾。

本報では, 前報で定義した基本密度関数をもとに, 回転だ円体状空かが複数個存在する場合の応力集中問題について, 体積力法の特異積分方程式を数値的により精度よく解析する方法を示す。また, 形状比と距離を系統的に変化させ, 応力集中の干渉効果を過去の研究と比較して考察する。さらに, ドーナツ状空洞の応力集中問題の解析を行い, 従来の方法による結果⁽¹⁰⁾の誤差を検討する。

2. 体積力法の特異積分方程式の 数値解析法

2・1 従来の体積力法の解析法 図 1(a)に示す, 遠方で一様な z 方向の引張応力 σ_z^∞ を受けるような無限体中の回転だ円体状空かの干渉問題を例にとる。この問題は, 重ね合わせの原理に基づく体積力法の考え方により, 空かない無限板中の $[\rho = a \cos \alpha, \zeta = \pm(d + b \sin \alpha)]$ に集中力の輪が二つ作用するときの任意の点 $(r = a \cos \psi, z = d + b \sin \psi)$ の応力場の解 $(K_{nr}^{Fr}, K_{nz}^{Fz}, K_{nr}^{Fr}, K_{nz}^{Fz})$ を用いて解くことができる⁽¹⁰⁾。このとき問題は, 空かとなるべき仮想境界上に

* 平成 5 年 3 月 17 日 九州支部第 46 期総会講演会および平成 5 年 4 月 1 日 第 70 期通常総会講演会において講演, 原稿受付 平成 5 年 2 月 12 日。

*¹ 正員, 九州工業大学工学部(〒804 北九州市戸畑区仙水町 1-1)。

*² 准員, 九州工業大学大学院。

分布させた, 面積 $\rho d\phi ds$ ($ds = \sqrt{(d\rho)^2 + (d\zeta)^2}$) の微小要素に作用させた体積力密度 $\rho_r^*(a)$, $\rho_z^*(a)$ を未知関数とする特異積分方程式(1)で表現される [着力点の円筒座標を (ρ, ϕ, ζ) として注目点の円筒座標 (r, θ, z) と区別して用いる].

$$\begin{aligned} & (-1/2)\{\rho_r^*(\psi)\cos\psi_0 + \rho_z^*(\psi)\sin\psi_0\} \\ & + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_{nn}^{Fr}(a, \psi) \rho_r^*(a) ds \\ & + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_{nn}^{Fz}(a, \psi) \rho_z^*(a) ds \\ & = -\sigma_z^\infty \sin^2\psi_0 \\ & (-1/2)\{-\rho_r^*(\psi)\sin\psi_0 + \rho_z^*(\psi)\cos\psi_0\} \\ & + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_{nt}^{Fr}(a, \psi) \rho_r^*(a) ds \\ & + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_{nt}^{Fz}(a, \psi) \rho_z^*(a) ds \\ & = -\sigma_z^\infty \sin\psi_0 \cos\psi_0 \\ & \dots\dots\dots (1) \end{aligned}$$

ここで,

$$\left. \begin{aligned} -d\rho &= a \sin ada, \quad d\zeta = b \cos ada \\ ds &= \sqrt{a^2 \sin^2 a + b^2 \cos^2 a} da \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

である. また, ψ_0 は点 (r, z) における空かの外向き法線と r 軸のなす角度である.

式(1)は仮想境界上における境界条件 $\sigma_n=0$, $\tau_{nt}=0$ に相当している. 式(1)の第1項は, 体積力を $\ominus$ 境界⁽¹⁾に作用させたとき仮想境界上に生じる応力の項である. 式(1)の第2, 第3項は, $\psi=a$ のとき $\sin[(\psi-a)/2]$ の特異性を有する. そのため, $\psi=a$ の場合には, 積分のコーシーの主値を取るものとする.

特異積分方程式 [式(1)] の未知関数である $\rho_r^*(a)$, $\rho_z^*(a)$ は次のように表される.

$$\begin{aligned} \rho_r^*(a) &= \frac{dF_r}{\rho d\phi ds} = \frac{dF_r}{\rho d\phi da} n_r = \rho_r(a) n_r \\ \rho_z^*(a) &= \frac{dF_z}{\rho d\phi ds} = -\frac{dF_z}{\rho d\phi d\rho} n_z = \rho_z(a) n_z \\ &\dots\dots\dots (3) \end{aligned}$$

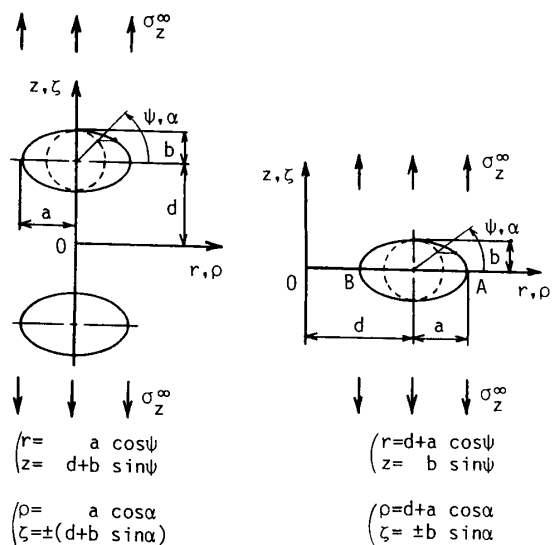


図1 本論文で考察した三次元応力集中問題

ここで, dF_r , dF_z は面積 $\rho d\phi ds$ の微小要素に作用する体積力の合力の r , z 方向の成分である. また, $n_r(a)$, $n_z(a)$ は, 仮想境界上の点 (r, z) における単位外向き法線ベクトルの r , z 方向の座標成分 ($\cos\psi_0$, $\sin\psi_0$) であり, 次式で表される.

$$\begin{aligned} n_r(a) &= \frac{b \cos \alpha}{\sqrt{a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha}} \dots\dots\dots (4) \\ n_z(a) &= \frac{a \sin \alpha}{\sqrt{a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha}} \end{aligned}$$

また, $\rho_r(a)$, $\rho_z(a)$ は, それぞれ z 方向および r 方向の投影面積当たりの体積力密度である.

$$\rho_r(a) = \frac{dF_r}{\rho d\phi d\zeta}, \quad \rho_z(a) = -\frac{dF_z}{\rho d\phi d\rho} \dots\dots\dots (5)$$

式(3)の表現を用いると式(1)の特異積分方程式は次のようになる.

$$\begin{aligned} & (-1/2)\{\rho_r(\psi)\cos^2\psi_0 + \rho_z(\psi)\sin^2\psi_0\} + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_{nn}^{Fr}(a, \psi) \rho_r(a) b \cos ada + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_{nn}^{Fz}(a, \psi) \rho_z(a) a \sin ada \\ & = -\sigma_z^\infty \sin^2\psi_0 \\ & (-1/2)\{-\rho_r(\psi) + \rho_z(\psi)\} \sin\psi_0 \cos\psi_0 + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_{nt}^{Fr}(a, \psi) \rho_r(a) b \cos ada + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_{nt}^{Fz}(a, \psi) \rho_z(a) a \sin ada \\ & = -\sigma_z^\infty \sin\psi_0 \cos\psi_0 \\ & \dots\dots\dots (6) \end{aligned}$$

従来の体積力法による解析では $\rho_r(a)$, $\rho_z(a)$ を階段関数で近似して, 積分方程式を離散化し解析しているが, 本研究では以下に示す解析を用いる.

2.2 回転円筒体状空かの干渉問題の解析法 前報の二次元問題の場合と同様に⁽⁹⁾, r 方向の体積力の基本密度関数 $w_r(a)$ および, z 方向の基本密度関数 $w_z(a)$ を次式で定義する.

$$\left. \begin{aligned} w_{r1}(\alpha) &= n_r(\alpha)/\cos \alpha, \quad w_{r2}(\alpha) = n_r(\alpha)\tan \alpha \\ w_{r3}(\alpha) &= n_r(\alpha), \quad w_{r4}(\alpha) = n_r(\alpha)\sin \alpha \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7\cdot a)$$

$$\left. \begin{aligned} w_{z1}(\alpha) &= n_z(\alpha)/\sin \alpha, \quad w_{z2}(\alpha) = n_z(\alpha) \\ w_{z3}(\alpha) &= n_z(\alpha)\cot \alpha, \quad w_{z4}(\alpha) = n_z(\alpha)\cos \alpha \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7\cdot b)$$

すなわち、本解析では、式(7)で定義される基本密度関数の組合せによって $\rho_r^*(\alpha)$, $\rho_z^*(\alpha)$ を表現する。いま、問題の対称性を考慮して、基本密度関数として、 $w_{r3}(\alpha)$, $w_{r4}(\alpha)$, $w_{z1}(\alpha)$, $w_{z2}(\alpha)$ を採用すれば、 $\rho_r^*(\alpha)$, $\rho_z^*(\alpha)$ は、 $\alpha=0$ で対称な関数 $\rho_{r3}(\alpha)$, $\rho_{r4}(\alpha)$, $\rho_{z2}(\alpha)$, $\rho_{z1}(\alpha)$ を用いて式(8)で表現される。

$$\rho_r^*(\alpha) = \rho_{r3}(\alpha)w_{r3}(\alpha) + \rho_{r4}(\alpha)w_{r4}(\alpha), \quad \rho_z^*(\alpha) = \rho_{z2}(\alpha)w_{z2}(\alpha) + \rho_{z1}(\alpha)w_{z1}(\alpha) \dots\dots\dots (8)$$

したがって、問題は式(9)の特異積分方程式で表現される。

$$\begin{aligned} & (-1/2)[\{\rho_{r3}(\psi) + \rho_{r4}(\psi)\sin \psi\}\cos^2 \psi_0 + \{\rho_{z2}(\psi) + \rho_{z1}(\psi)/\sin \psi\}\sin^2 \psi_0] \\ & + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_{nn}^{Fr}(\alpha, \psi)\{\rho_{r3}(\alpha) + \rho_{r4}(\alpha)\sin \alpha\}b \cos \alpha d\alpha + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_{nn}^{Fz}(\alpha, \psi)\{\rho_{z2}(\alpha) + \rho_{z1}(\alpha)/\sin \alpha\}a \sin \alpha d\alpha \\ & = -\sigma_z^\infty \sin^2 \psi_0 \\ & (-1/2)[-\{\rho_{r3}(\psi) + \rho_{r4}(\psi)\sin \psi\} + \{\rho_{z2}(\psi) + \rho_{z1}(\psi)/\sin \psi\}]\sin \psi_0 \cos \psi_0 \\ & + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_{nt}^{Fr}(\alpha, \theta)\{\rho_{r3}(\alpha) + \rho_{r4}(\alpha)\sin \alpha\}b \cos \alpha d\alpha + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_{nt}^{Fz}(\alpha, \theta)\{\rho_{z2}(\alpha) + \rho_{z1}(\alpha)/\sin \alpha\}a \sin \alpha d\alpha \\ & = -\sigma_z^\infty \sin \psi_0 \cos \psi_0 \end{aligned} \dots\dots\dots (9)$$

未知関数を連続関数として近似するために次のような表現を用いる。

$$\left(\begin{aligned} \rho_{r3}(\alpha) &= \sum_{n=1}^{M/2} a_n t_n(\alpha) \\ \rho_{r4}(\alpha) &= \sum_{n=1}^{M/2} b_n t_n(\alpha) \end{aligned} \right) \left(\begin{aligned} \rho_{z2}(\alpha) &= \sum_{n=1}^{M/2} c_n t_n(\alpha) \\ \rho_{z1}(\alpha) &= \sum_{n=1}^{M/2} d_n t_n(\alpha) \end{aligned} \right) \dots\dots\dots (10)$$

$$t_n(\alpha) = \cos\{2(n-1)\alpha\} \dots\dots\dots (11)$$

ここで M は $-\pi/2 \leq \alpha \leq \pi/2$ の範囲の選点数である。

以上の離散化の方法により、式(9)の積分方程式は係数 a_n , b_n , c_n , d_n についての $2M$ 元の連立方程式 [式(13)] に還元される。境界条件を満足させる点は式(12)で定義される。

$$\psi_l = (\pi/M)(l-0.5) - \pi/2, \quad l=1 \sim M \dots\dots\dots (12)$$

$$\sum_{n=1}^{M/2} (a_n A_n + b_n B_n + c_n C_n + d_n D_n) = -\sigma_z^\infty \sin^2 \psi_0 \dots\dots\dots (13)$$

$$\sum_{n=1}^{M/2} (a_n E_n + b_n F_n + c_n G_n + d_n H_n) = -\sigma_z^\infty \sin \psi_0 \cos \psi_0$$

$$A_n = (-1/2)t_n(\psi)\cos^2 \psi_0 + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_{nn}^{Fr}(\alpha, \psi)t_n(\alpha)b \cos \alpha d\alpha \dots\dots\dots (14)$$

$B_n \sim H_n$ も式(14)と同様な形で表現できる。

任意の点の応力は係数 a_n , b_n , c_n , d_n と $A_n \sim H_n$ に相当する影響係数の一次結合で表される。以上の解析方法により無限体中の二つの回転だ円体状空かの境界上の応力分布ならびに最大応力を求める。

2.3 ドーナツ状空洞の応力集中問題の解析法 また、別の問題として、図1(b)に示すように遠方で一様な z 方向の引張応力 σ_z^∞ を受ける無限体中のドーナツ状空洞の応力集中問題を例にとる。この問題も、無限体中の ($\rho = d + a \cos \alpha$, $\zeta = \pm b \sin \alpha$) に集中力の輪が二つ作用するときの任意の点 ($r = d + a \cos \psi$, $z = b \sin \psi$) の応力場の解を用いて解くことができる。問題の対称性を考慮して、基本密度関数として、 $w_{r1}(\alpha)$, $w_{r3}(\alpha)$, $w_{z2}(\alpha)$, $w_{z4}(\alpha)$ を採用すれば、 $\rho_r^*(\alpha)$, $\rho_z^*(\alpha)$ は、 $\alpha=0, \pi/2$ で対称な関数 $\rho_{r3}(\alpha)$, $\rho_{r1}(\alpha)$, $\rho_{z2}(\alpha)$, $\rho_{z4}(\alpha)$ を用いて式(15)で表現される。

$$\rho_r^*(\alpha) = \rho_{r3}(\alpha)w_{r3}(\alpha) + \rho_{r1}(\alpha)w_{r1}(\alpha), \quad \rho_z^*(\alpha) = \rho_{z2}(\alpha)w_{z2}(\alpha) + \rho_{z4}(\alpha)w_{z4}(\alpha) \dots\dots\dots (15)$$

したがって、問題は式(16)の特異積分方程式で表現される。

$$\begin{aligned} & (-1/2)[\{\rho_{r3}(\psi) + \rho_{r1}(\psi)/\cos \psi\}\cos^2 \psi_0 + \{\rho_{z2}(\psi) + \rho_{z4}(\psi)\cos \psi\}\sin^2 \psi_0] + \int_0^\pi K_{nn}^{Fr}(\alpha, \psi)\{\rho_{r3}(\alpha) \\ & + \rho_{r1}(\alpha)/\cos \alpha\}b \cos \alpha d\alpha + \int_0^\pi K_{nn}^{Fz}(\alpha, \psi)\{\rho_{z2}(\alpha) + \rho_{z4}(\alpha)\cos \alpha\}a \sin \alpha d\alpha = -\sigma_z^\infty \sin^2 \psi_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & (-1/2)[-\{\rho_{r3}(\psi) + \rho_{r1}(\psi)/\cos \psi\} + \{\rho_{z2}(\psi) + \rho_{z4}(\psi) \cos \psi\}] \sin \psi_0 \cos \psi_0 + \int_0^\pi K_{nt}^{Fr}(\alpha, \psi) \{\rho_{r3}(\alpha) \\
 & + \rho_{r1}(\alpha)/\cos \alpha\} b \cos \alpha d\alpha + \int_0^\pi K_{nt}^{Fz}(\alpha, \psi) \{\rho_{z2}(\alpha) + \rho_{z4}(\alpha) \cos \alpha\} a \sin \alpha d\alpha = -\sigma_z^\infty \sin \psi_0 \cos \psi_0 \\
 & \dots\dots\dots (16)
 \end{aligned}$$

未知関数を連続関数として近似するため次のような表現を用いる。

$$\begin{aligned}
 \left(\begin{array}{l} \rho_{r3}(\alpha) = \sum_{n=1}^{M/2} a_n t_n(\alpha) \\ \rho_{r1}(\alpha) = \sum_{n=1}^{M/2} b_n t_n(\alpha) \end{array} \right) & \left(\begin{array}{l} \rho_{z2}(\alpha) = \sum_{n=1}^{M/2} c_n t_n(\alpha) \\ \rho_{z4}(\alpha) = \sum_{n=1}^{M/2} d_n t_n(\alpha) \end{array} \right) \\
 \dots\dots\dots (17)
 \end{aligned}$$

$$t_n(\alpha) = \cos\{2(n-1)\alpha\} \dots\dots\dots (18)$$

ここで M は $0 \leq \alpha \leq \pi$ の選点数である。

以上の離散化の方法により、式(16)の積分方程式は係数 a_n, b_n, c_n, d_n についての $2M$ 元の連立方程式に還元される。以上の解析方法により無限体中のドーナツ状空洞の境界上の応力分布ならびに最大応力を求める。

3. 解析結果および考察

3・1 二つの回転だ円体状空かの干渉問題の解析結果
図1(a)の無限体中の二つの回転だ円体状空かの問題において、形状比が $a/b=1, b/d=2/3, \sigma_z^\infty=1$ の場合の空か縁に沿った未知関数 $\rho_{r3}, \rho_{z2}, \rho_{r4}, \rho_{z1}$ の密度分布を図2に示す。また、参考のために、従来の体積力法で行われているように ρ_{r4}, ρ_{z1} を用いず、未知関数である ρ_{r3}, ρ_{z2} をそのまま階段関数で離散化した場合の解析結果も $M=12, 24$ の場合について示している。 $\rho_{r3}, \rho_{z2}, \rho_{r4}, \rho_{z1}$ を分布させて解析した本解

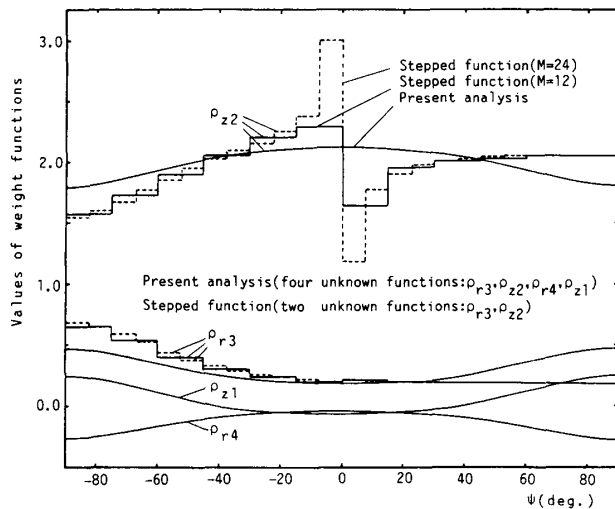


図2 未知関数の収束性の比較 ($\sigma_z^\infty=1$)
[図1(a)で $a/b=1, b/d=2/3, \nu=0.3$]

析では、 $M=12$ と $M=16$ はほとんど一致しており、連続関数である真の密度分布をよく近似している。階段関数を用いた場合には、特に $\psi=0^\circ$ 近くで真の密度分布を表現できないために選点数(分割数)を増加しても密度が収束しないことがわかる。

次に、境界条件 ($\sigma_n=0, \tau_{nt}=0$) の満足度確かめるために、形状比が $a/b=1, b/d=2/3, \sigma_z^\infty=1$ の場合空か縁における応力 $\sigma_t, \sigma_n, \tau_{nt}$ の分布を表1に示す。本解析結果では、 σ_n, τ_{nt} は空か縁全周において $M=12$ 程度でも 10^{-5} 以下であり、高い境界条件の満足度が確かめられた。

さらに、形状比が $a/b=1, \sigma_z^\infty=1, \nu=0.25$ の場合、 $\lambda=b/d$ を変化させたときの最大応力と $\psi=0^\circ$ にお

表1 二つの回転だ円体状空かの干渉問題における境界に沿った応力 ($\sigma_z^\infty=1$)

$a/b = 1, b/d = 2/3, \nu = 0.3$				
ψ (deg.)	M	σ_t	σ_n	τ_{nt}
-90	4	-0.40021	-4.6×10^{-2}	6.0×10^{-4}
	8	-0.35904	-8.8×10^{-4}	7.1×10^{-6}
	12	-0.35826	5.1×10^{-6}	-9.1×10^{-7}
	16	-0.35826	8.4×10^{-7}	-3.4×10^{-7}
-40	4	0.62140	8.3×10^{-3}	-2.5×10^{-2}
	8	0.63685	-2.2×10^{-4}	4.6×10^{-4}
	12	0.63628	1.8×10^{-6}	8.4×10^{-7}
	16	0.63628	1.3×10^{-7}	1.2×10^{-8}
-5	4	1.88668	5.9×10^{-3}	1.5×10^{-2}
	8	1.89050	8.8×10^{-5}	3.5×10^{-4}
	12	1.89097	-1.3×10^{-6}	7.7×10^{-7}
	16	1.89097	3.7×10^{-7}	-2.5×10^{-8}
0	4	1.94102	7.2×10^{-3}	1.5×10^{-2}
	8	1.93431	1.5×10^{-4}	4.2×10^{-4}
	12	1.93417	-1.9×10^{-6}	1.7×10^{-6}
	16	1.93417	-1.5×10^{-7}	-2.5×10^{-7}
2.4	4	1.95066	7.4×10^{-3}	1.4×10^{-2}
	8	1.93979	1.5×10^{-4}	3.8×10^{-4}
	12	1.93939	-1.5×10^{-6}	1.6×10^{-6}
	16	1.93939	1.9×10^{-7}	-2.0×10^{-7}
5	4	1.94890	7.4×10^{-3}	1.2×10^{-2}
	8	1.93430	1.3×10^{-4}	3.0×10^{-4}
	12	1.93369	-9.6×10^{-7}	9.4×10^{-7}
	16	1.93369	3.6×10^{-7}	-6.0×10^{-8}
40	4	0.91012	-8.9×10^{-3}	-5.3×10^{-2}
	8	0.91227	2.0×10^{-4}	1.5×10^{-4}
	12	0.91233	-1.7×10^{-7}	-8.1×10^{-7}
	16	0.91233	4.4×10^{-7}	-7.9×10^{-7}
90	4	-0.65336	9.1×10^{-3}	6.6×10^{-5}
	8	-0.66051	2.8×10^{-4}	4.8×10^{-6}
	12	-0.66074	1.3×10^{-6}	1.0×10^{-6}
	16	-0.66074	-1.7×10^{-7}	4.3×10^{-7}

る応力の収束値を西谷の近似計算値⁽¹¹⁾ および宮本の解⁽¹²⁾ とともに表2に示す。西谷の近似計算は切欠きの干渉効果の物理的意味をもとにした近似計算法で、従来の体積力法の分割数が1の場合に相当する。宮本の解は、Boussinesq関数と球座標を用いた結果である。表2中の ψ は最大応力が生じる位置である。 λ が小さいとき西谷、宮本の結果は本解析結果とよく一致するが、 λ が大きくなるにつれて誤差が生じていることがわかる。

最後に、形状比が $b/d=1/3, 0.5, 2/3, \sigma_z^\infty=1, \nu=0.3$ の場合、形状比 a/b を変化させたとき、応力集中係数 K_t の最大値の収束値を、それが生じる位置 ψ とともに表3に示す。応力集中係数の値は、有効数字5けた程度まで収束していて、形状比 a/b , および b/d の広範囲で本解析法が有効であることがわかった。

3.2 ドーナツ状空洞の応力集中問題の解析結果

図1(b)の無限体中のドーナツ状空洞の問題において、形状比が $a/b=1, a/d=2/3, 0.9, \sigma_z^\infty=1, \nu=0.3$ の場合の空洞縁に沿った未知関数 $\rho_{r3}, \rho_{z2}, \rho_{r1}, \rho_{z4}$ の密度分布をそれぞれ図3(a), (b)に示す。また、参考のために、従来の体積力法で行われているように、 ρ_{r1}, ρ_{z4} を用いず、未知関数である ρ_{r3}, ρ_{z2} をそのまま階段関数で離散化した場合の解析結果も $M=12$,

24の場合について示している。 $\rho_{r3}, \rho_{z2}, \rho_{r1}, \rho_{z4}$ を分布させて解析した本解析では、 $M=12$ と $M=16$ はほとんど一致しており、連続関数である真の密度分布をよく近似している。一方、階段関数を用いた場合には、特に $\psi=90^\circ$ 近くで真の密度を表現できないために選点数(分割数)を増加しても密度が収束しないことがわかる。

例として、形状比が $a/b=1, a/d=2/3, \sigma_z^\infty=1$ の場合の空洞縁における応力 $\sigma_t, \sigma_n, \tau_{nt}$ の分布を表4に示す。本解析結果では、 σ_n, τ_{nt} は空洞縁全周において $M=16$ 程度でも 10^{-5} 以下であり、高い境界条件の満足度が確かめられた。

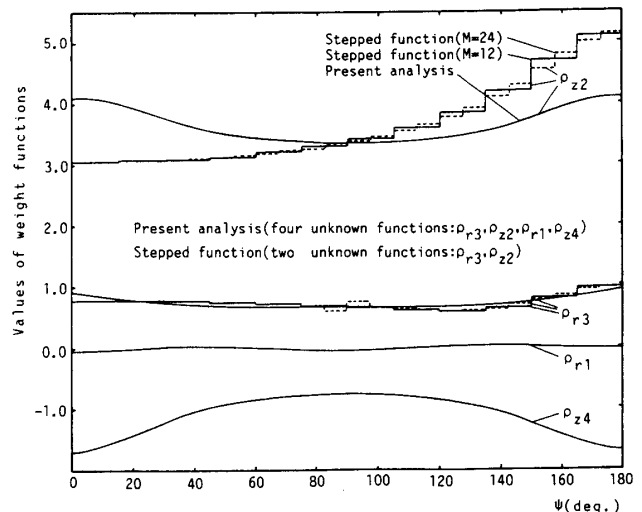
次に、形状比が $a/b=1, a/d=0.9, \sigma_z^\infty=1, \nu=0.3$ のとき、点A($\psi=0^\circ$)および点B($\psi=180^\circ$)における応力集中係数の収束状況を階段関数を用いた解析結果と

表2 二つの回転円体状空かの応力集中係数
($K_{t\max}=\sigma_{t\max}/\sigma_z^\infty, K_t=\sigma_t|_{\psi=0}/\sigma_z^\infty, \lambda=b/d$)

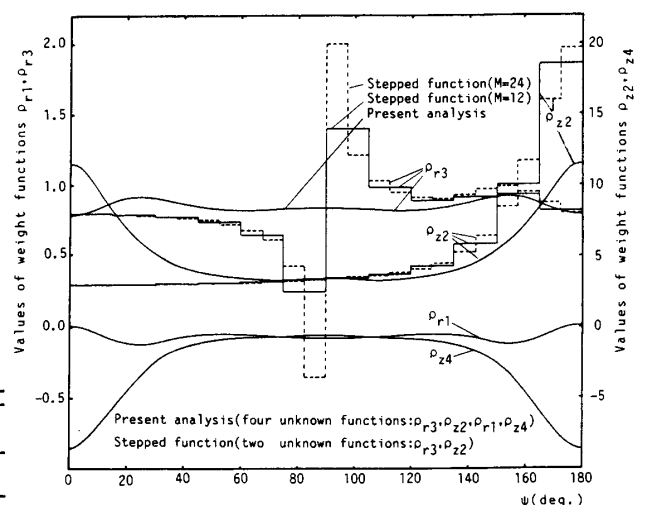
$a/b = 1, \nu = 0.25$				
	Present Analysis		Nisitani	Miyamoto
λ	$K_{t\max}(\psi)$	$K_t(\psi=0^\circ)$	[11]	[12]
0	2.0217 (0°)	2.0217	2.022	2.022
0.1	2.0209 (0°)	2.0209	2.021	2.021
0.2	2.0157 (0°)	2.0157	2.016	2.016
0.3	2.0031 (0.2°)	2.0031	2.003	2.002
0.4	1.9830 (0.5°)	1.9828	1.983	1.986
0.5	1.9584 (1.0°)	1.9573	1.959	1.969
0.6	1.9338 (2.0°)	1.9306	(1.941)	
0.7	1.9124 (2.7°)	1.9062	(1.944)	
0.8	1.8951 (3.4°)	1.8854	(1.994)	
0.9	1.8810 (3.8°)	1.8676	(2.147)	

表3 二つの回転円体状空かの最大応力の生じる位置と
応力集中係数($K_t=\sigma_{\max}/\sigma_z^\infty, \nu=0.3$)
[K_{t0} は一つの空かの $K_t(b/d \rightarrow 0)$ に相当]

b/d	0	1/3	0.5	2/3
a/b	K_{t0}	$K_t(\psi)$	$K_t(\psi)$	$K_t(\psi)$
1	2.0455	2.0200 (0.3°)	1.9800 (1.2°)	1.9394 (2.4°)
2	3.3130	3.1515 (0.6°)	3.0269 (1.5°)	2.9492 (2.1°)
4	5.8678	5.1063 (0.8°)	4.9734 (1.2°)	4.8634 (1.5°)
8	10.9706	8.9554 (0.5°)	8.6904 (0.8°)	8.5604 (0.8°)



(a) 図1(b)で $a/b=1, a/d=2/3, \nu=0.3$



(b) 図1(b)で $a/b=1, a/d=0.9, \nu=0.3$

図3 未知関数の収束性の比較($\sigma_z^\infty=1$)

ともに表5に示す。表中の階段関数を用いた体積力法の外挿値は $M=48$ と 36 の解析結果によるものである。本解析結果は $M=20$ 程度で有効数字5けた程度収束して、外挿を必要とする階段関数を用いる体積力法よりも良好な収束性を示している。

また、形状比が、 $a/b=1$, $\sigma_z^{\infty}=1$, $\nu=0.3$ のとき、最小断面OB間に生じる応力 $\sigma_z(r)$ を積分してOB間の力 F を求め、 F によって与えられる公称応力 σ_n^* を用いることにして得られる応力集中係数 K_t を、階段関数を用いた従来の体積力法による解析結果とともに表6に示す。参考のため、半円切欠きを有する丸棒の

解⁽¹⁰⁾ [()は長谷川の解⁽¹³⁾] と Neuber の回転双曲面切欠きの解⁽¹⁴⁾ も示す。ここで、 K_t は次式で与えられる。

$$F = \int_0^r \int_0^{2\pi} \sigma_z(r) r dr d\phi \dots\dots\dots (19)$$

$$K_t = \frac{\sigma_{\max B}}{\sigma_n^*}, \sigma_n^* = \frac{F}{\pi(d-a)^2} \dots\dots\dots (20)$$

階段関数を用いた従来の体積力法と本解析結果は有効数字5けた程度一致している。従来の体積力法による解析では、図3に示すように $a/d \rightarrow 1$ につれて、 $\psi=90^\circ$ 付近では未知関数の値が収束しないために、境界条件

表4 ドーナツ状空洞の応力集中問題における境界に沿った応力 ($\sigma_z^{\infty}=1$)

$a/b = 1, a/d = 2/3, \nu = 0.3$				
ψ (deg.)	M	σ_t	σ_n	τ_{nt}
0	4	2.69311	-9.4×10^{-4}	0
	8	2.69383	1.0×10^{-5}	0
	12	2.69376	2.3×10^{-5}	0
	16	2.69373	9.5×10^{-7}	0
	20	2.69373	-3.9×10^{-8}	0
40	4	1.37579	-5.0×10^{-3}	-9.3×10^{-4}
	8	1.37277	3.8×10^{-4}	3.9×10^{-4}
	12	1.37306	-1.7×10^{-5}	-2.8×10^{-6}
	16	1.37307	2.0×10^{-7}	-1.2×10^{-8}
	20	1.37307	-3.6×10^{-8}	2.8×10^{-10}
80	4	-0.62571	1.7×10^{-2}	9.3×10^{-3}
	8	-0.62466	2.6×10^{-4}	6.9×10^{-5}
	12	-0.62409	-2.9×10^{-5}	6.6×10^{-6}
	16	-0.62408	-1.5×10^{-6}	7.4×10^{-7}
	20	-0.62408	-3.7×10^{-8}	2.1×10^{-9}
100	4	-0.72831	2.5×10^{-2}	7.2×10^{-3}
	8	-0.76442	3.5×10^{-4}	-5.0×10^{-6}
	12	-0.76488	-3.3×10^{-5}	1.8×10^{-5}
	16	-0.76478	-1.5×10^{-6}	1.3×10^{-6}
	20	-0.76478	-3.1×10^{-8}	5.4×10^{-8}
140	4	1.60783	-6.0×10^{-2}	2.2×10^{-3}
	8	1.65287	1.8×10^{-3}	-1.1×10^{-3}
	12	1.65293	-1.7×10^{-5}	4.3×10^{-5}
	16	1.65280	3.9×10^{-8}	-4.6×10^{-7}
	20	1.65281	1.3×10^{-9}	-9.2×10^{-9}
180	4	4.35635	8.4×10^{-2}	0
	8	4.30702	1.2×10^{-3}	0
	12	4.30589	-3.7×10^{-5}	0
	16	4.30593	-2.1×10^{-6}	0
	20	4.30593	-9.5×10^{-8}	0

表5 ドーナツ状空洞の応力集中係数の収束性

[図1(b)で $a/b=1$, $K_{tA}=\sigma_{zA}/\sigma_z^{\infty}$, $K_{tB}=\sigma_{zB}/\sigma_z^{\infty}$, $K_t=\sigma_{zB}/\sigma_n$, $\sigma_n=F/\{\pi(d-a)^2\}$, $\nu=0.3$]

Present analysis				Stepped functions (ρ_{r3}, ρ_{z2})			
$a/d = 0.9$				$a/d = 0.9$			
M	K_{tA}	K_{tB}	K_t	M	K_{tA}	K_{tB}	K_t
4	2.7032	8.3286	1.0242	4	2.6894	8.9249	1.0185
8	2.6529	8.4751	1.0422	8	2.6446	8.8165	1.0330
12	2.6373	8.3918	1.0470	12	2.6387	8.5311	1.0403
16	2.6343	8.3802	1.0476	16	2.6368	8.4558	1.0435
20	2.6338	8.3785	1.0477	24	2.6353	8.4132	1.0458
24	2.6337	8.3783	1.0477	32	2.6347	8.3989	1.0465
28	2.6336	8.3783	1.0477	48	2.6343	8.3884	1.0470
				∞	2.633	8.373	1.048

表6 ドーナツ状空洞の応力集中係数

[$K_t=\sigma_{zB}/\sigma_n$, $\sigma_n=F/\{\pi(d-a)^2\}$, $\nu=0.3$]

	Present analysis	Stepped functions (ρ_{r3}, ρ_{z2})	Notched Round Bar [10, 13]	Deep Notch [14]
a/d	K_t	K_t	K_t	K_t
0.0	3.0000	3.0000	3.065 (3.065)	∞
0.1	2.5484	2.5484	2.601 (2.593)	3.1845
0.2	2.1836	2.1836	2.196 (2.191)	2.2272
0.3	1.8803	1.8803	1.869 (1.871)	1.8052
0.4	1.6309	1.6308	1.610 (1.608)	1.5571
0.5	1.4321	1.4320	1.412 (1.411)	1.3908
0.6	1.2820	1.2818	1.270 (1.270)	1.2705
0.7	1.1762	1.1761	1.172 (1.172)	1.1790
0.8	1.1036	1.1037	1.103 (1.101)	1.1069
0.9	1.0477	1.0481	1.048 (1.046)	1.0484

表7 ドーナツ状空洞の応力集中係数 [$K_{tA}=\sigma_{zA}/\sigma_z^{\infty}$, $K_{tB}=\sigma_{zB}/\sigma_z^{\infty}$, $K_t=\sigma_{zB}/\sigma_n$, $\sigma_n=F/\{\pi(d-a)^2\}$, $\nu=0.3$]

(K_{tA0} , K_{tB0} , K_{t0} は無限板中の一つの円孔の応力集中係数)

	$a/d = 0$			$a/d = 1/3$			$a/d = 0.5$			$a/d = 2/3$		
a/b	K_{tA0}	K_{tB0}	K_{t0}	K_{tA}	K_{tB}	K_t	K_{tA}	K_{tB}	K_t	K_{tA}	K_{tB}	K_t
1	3	3	3	2.7896	3.2719	1.7914	2.7355	3.5719	1.4321	2.6937	4.3059	1.2070
2	5	5	5	4.6813	5.5833	3.0011	4.5886	6.1112	2.3197	4.5219	7.1146	1.7592
4	9	9	9	8.4684	10.165	5.4266	8.3085	11.247	4.1934	8.1883	13.165	3.1037
8	17	17	17	16.038	19.282	10.150	15.750	21.445	7.9197	15.530	25.278	5.8679

の満足度が悪くなることが予想される。しかし、表6に示すように $\phi=0^\circ$ および 180° に生じる最大応力への影響はあまり大きくないようである。

最後に、形状比が $a/d=1/3, 0.5, 2/3, \sigma_z=1, \nu=0.3$ の場合、形状比 a/b を変化させたとき、応力集中係数 K_{tA}, K_{tB}, K_t の収束値を表7に示す。応力集中係数の値は、有効数字5けた程度まで収束していて、形状比 a/b , および a/d の広範囲で本解析法が有効であることがわかった。

4. 結 言

本研究では、前報までの研究を応用して三次元問題における体積力法の特異積分方程式を厳密に解析する方法を考察した。結果をまとめると以下になる。

(1) 無限体中の二つの回転だ円体状空かの干渉問題とドーナツ状空洞の応力集中問題の解析を行った。これらの問題は、前報および本報で提案した、未知関数を基本密度関数の組合せで表現する解析方法によって、境界上のいずれの点でも形状比の広範囲で境界条件をほとんど完全に満足させることが可能であり、厳

密な応力集中係数が得られた(表1~7)。

(2) 対称形の体積力密度のみを未知関数とする従来の解析方法では、選点数(分割数)を増加しても未知関数の値が収束せず、境界上の応力等が精度よく求められない場合があるが、本解析法では少ない選点数で良好な収束性が得られた(図2, 3)。

文 献

- (1) 西谷, 機誌, **70**-580(1967), 627.
- (2) 西谷・陳, 体積力法, (1987), 89, 培風館.
- (3) 野田・梅木・Erdogan, 機論, **55**-520, A(1989), 2512.
- (4) 野田・小田・陳, 機論, **56**-532, A(1990), 2405.
- (5) 野田・小田・増田, 機論, **57**-542, A(1991), 2332.
- (6) 野田・小田・石井, 機論, **59**-558, A(1993), 332.
- (7) 野田・松尾, 機論, **57**-543, A(1991), 2811.
- (8) 野田・松尾, 機論, **58**-555, A(1992), 2179.
- (9) 野田・松尾, 機論, **59**-559, A(1993), 785.
- (10) 野田, 九州大学学位論文, (1984), 50.
- (11) 西谷, 機誌, **71**-589(1968), 209.
- (12) 宮本, 機論, **23**-131(1957), 437.
- (13) 長谷川, 機論, **46**-407, A(1980), 805.
- (14) Neuber, H., *Kerbspannungslehre*, 第1版, (1937); 第2版, (1958), 9, Springer-Verlag.